

**Jorge Tobar Pinto**

*Jtobarp.ing.electronica@gmail.com*

Universidad Tecnológica Metropolitana

**Fernando Ulloa Vásquez**

*fulloa@utem.cl*

Universidad Tecnológica Metropolitana

# FUSIÓN Y FILTRADO DE DATOS INERCIALES DE UNA IMU DE 5DOF, PARA OBTENCIÓN DE LA ACTITUD DE UN VEHÍCULO U OBJETO

## RESUMEN

En el presente trabajo se explican, desarrollan y exponen los resultados de la fusión de los datos adquiridos de un acelerómetro y un giroscopio para obtener la actitud de un vehículo u objeto.

Palabras clave: **acelerómetro, filtro complementario, giroscopio, unidad de medida inercial.**

## ABSTRACT

In this paper explains, develops, and discuss results from the fusion of data acquired from an accelerometer and a gyroscope, for the attitude of a vehicle or object.

Keywords: **accelerometer, filter complementary, gyroscope, inertial measurement unit.**

## 1. INTRODUCCIÓN

Para controlar la actitud de un vehículo u objeto, es preciso disponer de sensores para medir la actitud del vehículo u objeto. Éstos pueden ser un acelerómetro y/o un giroscopio, pero al momento de trabajar con ellos en forma individual, pueden ser susceptibles al ruido o a la acumulación del error.

Para evitar estos problemas, se fusionan los datos obtenidos de tales sensores en forma simplificada.

## 2. FILTRADO DE DATOS INERCIALES

Para comprender el funcionamiento de la IMU y del filtro complementario, hay que explicar todo desde un principio, desde el mismo funcionamiento del acelerómetro y giroscopio hasta cómo se fusionan los datos para obtener finalmente la actitud.

### 2.1. Acelerómetro

Para comprender esta unidad, empezaremos por el acelerómetro. Cuando se piensa en los acelerómetros, a menudo es útil recurrir a la imagen de una caja en forma de cubo con una bola en su interior.

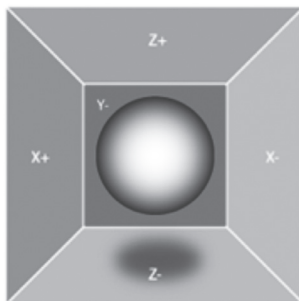


FIGURA 1. IMAGEN DE UNA CAJA EN FORMA DE UN CUBO CON UNA BOLA EN SU INTERIOR.

Si tomamos esta caja en un lugar sin campos gravitacionales o, lo que para el caso es lo mismo, sin otros campos que puedan afectar a la posición de la pelota, la pelota simplemente flotará en el centro de la caja. Desde la figura anterior se puede ver que se le asigna a cada eje un par de paredes (se quitó la pared +Y para que se pueda ver dentro de la caja). Hay que imaginar que cada pared es sensible a la presión. Si se mueve de repente la caja desde la izquierda (que se acelera con la aceleración de  $1\text{ g} = 9,8\text{ m/s}^2$ ), la pelota golpeará la pared X-. A continuación, mediremos la fuerza de presión que la bola aplica a la pared y la salida de un valor de  $-1\text{ g}$  en el eje X.

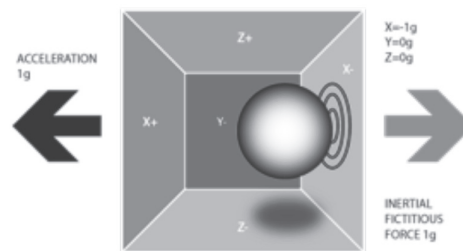
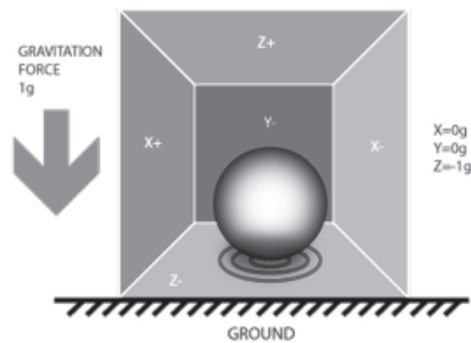


FIGURA 2. CAJA ACELERACIÓN HACIA LA IZQUIERDA

Podemos observar que el acelerómetro realmente detecta una fuerza que se dirige en la dirección opuesta a partir del vector de aceleración. Esta fuerza se llama a menudo fuerza de inercia o fuerza ficticia. Una cosa que se debe aprender de esto es que un acelerómetro mide la aceleración indirectamente a través de una fuerza que se aplica a una de sus paredes (de acuerdo con este modelo, podría ser un resorte o algo más en los acelerómetros de la vida real). Esta fuerza puede ser causada por la aceleración, pero como se verá en el siguiente ejemplo, no siempre es causada por la aceleración.

Si tomamos este modelo y lo situamos en la Tierra, caerá la bola en la pared Z- y se aplicará una fuerza de 1 g en la pared del fondo, como se muestra en la imagen siguiente:

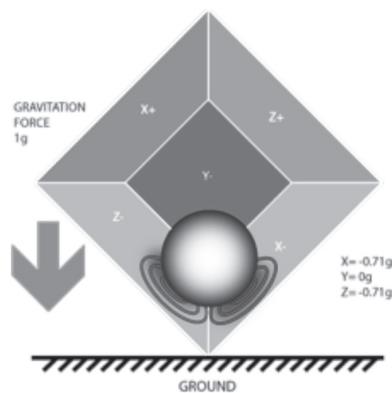
FIGURA 3. CAJA CON ACELERACIÓN GRAVITACIONAL.



En este caso, la caja no se está moviendo, pero aun así se obtiene una lectura de -1 g en el eje Z. La presión que la bola ha aplicado en la pared fue causada por una fuerza de gravitación. Lo que ocurre es que la aceleración provoca una fuerza de inercia que es capturada por el mecanismo de detección de la fuerza del acelerómetro.

Hasta ahora se ha analizado la salida del acelerómetro sólo en un eje y esto es todo lo que se obtiene con un acelerómetro de eje único. El valor real de los acelerómetros tri-axiales proviene del hecho de que pueden detectar las fuerzas de inercia en los tres ejes. Volviendo al modelo de la caja, se gira la caja en 45 grados a la derecha. La pelota va a tocar 2 paredes ahora: Z- y X-, como se muestra en la figura siguiente:

FIGURA 4. CAJA CON ACELERACIÓN GRAVITACIONAL GIRADA 45°.



Los valores de 0,71 no son arbitrarios, e. En realidad son una aproximación para  $\sqrt{1/2}$ , sobre lo que se volverá más adelante. En el modelo anterior se ha fijado la fuerza de la gravedad y el giro de la caja imaginaria. En los últimos 2 ejemplos que hemos analizado, se han probado 2 posiciones diferentes de la caja, mientras que el vector de fuerza se mantuvo constante. Si bien esto es útil para entender la interacción con el acelerómetro de fuerzas externas, es más práctico para realizar los cálculos, si se fijan el sistema de coordenadas de los ejes del acelerómetro e imaginemos que el vector de fuerza gira alrededor de nosotros.

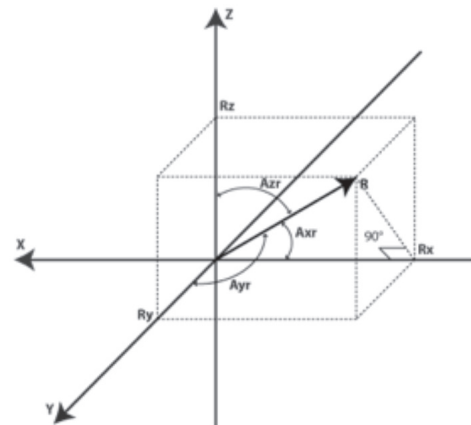


FIGURA 5. SISTEMA DE COORDENADAS DE LOS EJES DEL ACELERÓMETRO.

Observando la figura anterior (en la que se conservan los colores de los ejes), imaginemos que cada eje en el nuevo modelo es perpendicular a las respectivas caras de la caja en el modelo anterior. El vector R es el vector de fuerza que el acelerómetro está midiendo (que podría ser la fuerza de la gravedad o la fuerza de Inercia). Rx, Ry, Rz son la proyección del vector R en los ejes X, Y, Z.

Ecuación 1 (básicamente, el equivalente del teorema de Pitágoras en 3D):

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2$$

Para comprobar que los valores anteriormente utilizados no eran cifras al azar ( $\sqrt{1/2} \sim 0.71$ ). Si se conecta en la fórmula anterior, después de recordar que nuestra fuerza de gravitación fue de 1 g se puede comprobar que:

$$1^2 = (\sqrt{1/2})^2 + 0^2 + (-\sqrt{1/2})^2$$

Simplemente mediante la sustitución de  $R = 1$ ,

$$R_x = -(\sqrt{1/2}), R_y = 0, R_z = -(\sqrt{1/2})$$

para la ecuación 1..

Después de un largo preámbulo, la teoría se va acercando a los acelerómetros de la vida real. Los valores de  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $R_z$  en realidad están linealmente relacionados con los valores de salida de los acelerómetros de la vida real, que se pueden utilizar para realizar diversos cálculos.

La mayoría de los acelerómetros se clasifican en dos categorías: digital y analógica. Los Acelerómetros digitales se entregan la información a través de un protocolo de serie, como I2C, SPI y USART; mientras que en los acelerómetros analógicos es se da una salida de un nivel de tensión dentro de un rango predefinido, el que posteriormente se procesa a través de un ADC (conversor análogo digital).

Al considerar un ejemplo sencillo, supongamos que nuestro módulo de 10 bits ADC nos dioarrojó los siguientes valores para los tres canales de acelerómetro (ejes):

$$\begin{aligned} \text{AdcRx} &= 586 \\ \text{AdcRy} &= 630 \\ \text{AdcRz} &= 561 \end{aligned}$$

Cada módulo ADC tendrá un voltaje de referencia., vamos a suponer, para en nuestro ejemplo, que es de 3.3V. Para para convertir un

valor de 10 bits ADC a un voltaje que utilice la siguiente fórmula:

$$\text{VoltsRx} = \frac{\text{AdcRx} \cdot V_{\text{ref}}}{1023}$$

Una nota rápida aquí: ADC de 8 bits que, por el divisor de última, sería  $2^8 - 1$ , y para 12 bits ADC divisor de última sería  $2^{12} - 1$ . Aplicando esta fórmula a los 3 canales que recibimos, obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{VoltsRx} &= 586 * 3,3 / 1023 = \sim 1.89V \\ \text{VoltsRy} &= 630 * 3,3 / 1023 = \sim 2.03V \\ \text{VoltsRz} &= 561 * 3,3 / 1023 = \sim 1.81V \end{aligned}$$

(Redondeamos todos los resultados de 2 puntos decimales).

Cada acelerómetro tiene un nivel de tensión de gravedad cero, que se puede encontrar en las especificaciones. Este es el voltaje que corresponde a 0 g. Para obtener un valor de tensión firmado, tenemos que calcular el cambio de este nivel. Digamos que nuestro nivel de tensión es  $V_{\text{zeroG}} = 0 \text{ g} = 1.65V$ . Calculamos los cambios de tensión de gravedad cero de tensión de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{DeltaVoltsRx} &= 1.89V - 1.65V = 0.24V \\ \text{DeltaVoltsRy} &= 2.03V - 1.65V = 0.38V \\ \text{DeltaVoltsRz} &= 1.81V - 1.65V = 0.16V \end{aligned}$$

Ahora tenemos nuestras lecturas del acelerómetro en voltios, más todavía no es en  $g$  ( $9,8 \text{ m/s}^2$ ). Para realizar la conversión final, se aplica la sensibilidad del acelerómetro, que por lo general se expresa en  $\text{mV} / g$ . Digamos que nuestra sensibilidad es de  $478.5 \text{ mV/g} = 0.4785 \text{ V/g}$ . Los valores de sensibilidad se pueden encontrar en las especificaciones del acelerómetro. Para obtener los valores de fuerza

de final expresados en gramos, se utiliza la siguiente fórmula:

$$R_x = \text{DeltaVoltsRx} / \text{Sensibilidad}$$

$$R_x = 0.24V / 0.4785V / g \approx 0,50 g$$

$$R_y = 0.38V / 0.4785V / g \approx 0,79 g$$

$$R_z = 0.16V / 0.4785V / g \approx 0,33 g$$

Se podría, por supuesto, combinar todos los pasos y dar con una sola fórmula, pero se prefirió explicitar todos los pasos para que quedara claro cómo se va a partir de lecturas de ADC para un componente de vector de fuerza expresada en g.

$$R_x = \frac{\frac{\text{AdcRx} \cdot V_{\text{ref}}}{1023} - V_{\text{zeroG}}}{\text{Sensibilidad}}$$

$$R_y = \frac{\frac{\text{AdcRy} \cdot V_{\text{ref}}}{1023} - V_{\text{zeroG}}}{\text{Sensibilidad}}$$

$$R_z = \frac{\frac{\text{AdcRz} \cdot V_{\text{ref}}}{1023} - V_{\text{zeroG}}}{\text{Sensibilidad}}$$

Ahora se tienen los 3 componentes que definen nuestro vector de fuerza de inercia. Si el dispositivo no está sujeto a otras fuerzas distintas de la gravitación, se puede asumir que esta es la dirección de nuestro vector de fuerza de gravitación. Si se desea calcular la inclinación del dispositivo con respecto al suelo, se puede calcular el ángulo entre el vector y el eje Z. Si se está también interesado en la dirección del eje de inclinación, se puede dividir este resultado en 2 componentes: la inclinación en el eje X e Y, pudiéndose calcular el ángulo entre el vector gravitacional y los ejes X / Y. El cálculo de estos ángulos es más simple de lo que parece, ahora que se han calculado los

valores de Rx, Ry y Rz. Así, volviendo al modelo de acelerómetro pasado:

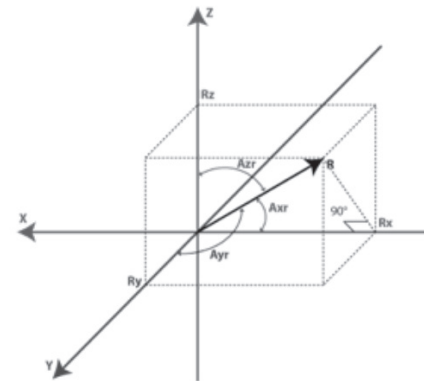


FIGURA 6. SISTEMA DE COORDENADAS DE LOS EJES DEL ACELERÓMETRO.

Los ángulos que nos interesan son los ángulos entre X, Y, Z y el vector de fuerza R. Se definirán estos ángulos como AXR, AYR, AZR. Se puede notar desde el triángulo rectángulo formado por R y Rx que:

$$\text{COS (AXR)} = R_x / R, \text{ y de manera similar:}$$

$$\text{COS (AYR)} = R_y / R$$

$$\text{COS (AZR)} = R_z / R$$

Se puede deducir de la Ecuación 1 que:

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ . Se puede encontrar ahora nuestros ángulos mediante el uso de arcos (>):

$$A_{xr} = \arccos (R_x / R)$$

$$A_{yr} = \arccos (R_y / R)$$

$$A_{zr} = \arccos (R_z / R)$$

Se ha recorrido un largo camino para explicar el modelo de acelerómetro, sólo para llegar a estas fórmulas. Introduciremos también el modelo de giroscopio, y se verá cómo los datos del acelerómetro y giroscopio se pueden combinar para obtener estimaciones más precisas de inclinación.

Pero antes se expresan las fórmulas, de forma más útil:

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos (A_{xr}) = R_x / R \\ \cos Y &= \cos (A_{yr}) = R_y / R \\ \cos Z &= \cos (A_{zr}) = R_z / R\end{aligned}$$

A esta triplete se le llama con frecuencia “coseno director”, y básicamente representa el vector unitario (vector de longitud 1) que tiene la misma dirección que nuestro vector R. De esta manera, se comprueba fácilmente que:

$$\sqrt{\cos (x)^2 + \cos (y)^2 + \cos (z)^2} = 1$$

Esta es una propiedad muy práctica, ya que nos absuelve de la vigilancia del módulo (longitud) del vector R. Muchas veces si sólo se está interesado en la dirección de nuestro vector de inercia, que tiene sentido para normalizar su módulo con el fin de simplificar los cálculos de otros.

## 2.2 Giroscopio

No introduciremos cualquier modelo de caja equivalente para el giroscopio como se hizo con el acelerómetro. En cambio, iremos directamente al modelo segundo de acelerómetro y se va a mostrar lo que hace la medida giroscopio de acuerdo con este modelo.

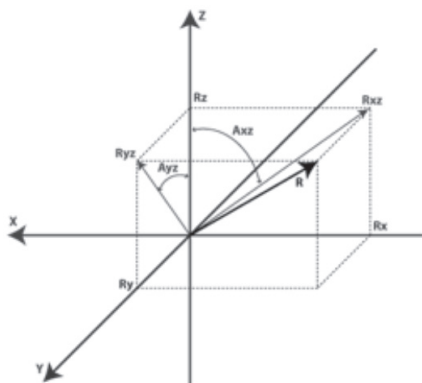


FIGURA 7. SISTEMA DE COORDENADAS DE LOS EJES DEL ACCELERÓMETRO Y GIROSCOPIO.

Cada canal del giroscopio mide la rotación alrededor de uno de los ejes. Por ejemplo, un giroscopio de 2 ejes medirá la rotación alrededor de (o algunos pueden decir "sobre") los ejes X e Y. En primer lugar se va a definir:

Rxz - es la proyección de la fuerza R vector de inercia en el plano XZ

Ryz - es la proyección de la fuerza R vector de inercia en el plano YZ

En el triángulo rectángulo formado por Rxz y Ryz, usando el teorema de Pitágoras tenemos:

$$\begin{aligned}R_{xz}^2 &= R_x^2 + R_z^2, \text{ y de manera similar:} \\ R_{yz}^2 &= R_y^2 + R_z^2\end{aligned}$$

También hay que tener en cuenta que:

$$\begin{aligned}R^2 &= R_{xz}^2 + R_y^2 \\ R^2 &= R_{yz}^2 + R_x^2\end{aligned}$$

Esto se puede derivar de la ecuación 1 y ecuaciones anteriores, o puede ser derivado del ángulo recto contenido en el triángulo R Y Ryz. Si bien no se utilizarán estas fórmulas en este modelo, es útil tener en cuenta la relación entre todos los valores de nuestro modelo.

En su lugar se va a definir el ángulo entre el eje Z y Rxz, y vectores Ryz de la siguiente manera:

Axz - es el ángulo entre la Rxz (proyección de R en el plano XZ) y el eje Z

Ayz - es el ángulo entre la Ryz (proyección de R en el plano YZ) y del eje Z

Ahora nos estamos acercando a las medidas del giroscopio. Un giroscopio mide la tasa de cambio de los ángulos definidos anteriormente. En otras palabras, se dará salida a un valor que está relacionado linealmente con la velocidad de cambio de estos ángulos. Para explicar esto

se va a suponer que se ha medido el ángulo de rotación alrededor del eje Y (que sería el ángulo AXZ) en el tiempo  $t_0$ , que definimos como  $AXZ_0$ . Junto a este ángulo se midió en un tiempo  $t_1$  que originó  $AXZ_1$ . La tasa de cambio se calcula como sigue:

$$\text{RateAxz} = \frac{AXZ_1 - AXZ_0}{(t_1 - t_0)}$$

Si se expresa Axz en grados, y el tiempo en segundos, este valor se expresa en grados / s, que es finalmente lo que mide un giroscopio. En la práctica, un giroscopio (a menos que sea un giroscopio digital especial) rara vez arrojará un valor expresado en grados. Igual que para el acelerómetro, se obtiene un valor analógico que se tendrá que procesar para ser expresado en grados / s utilizando una fórmula similar a la ecuación 2 que se ha definido para el acelerómetro.

$$\text{RateAxz} = \frac{\frac{\text{AdcGyroXZ} * \text{Vref}}{1023} - \text{VzeroRate}}{\text{Sensibilidad}}$$

$$\text{RateAyz} = \frac{\frac{\text{AdcGyroYZ} * \text{Vref}}{1023} - \text{VzeroRate}}{\text{Sensibilidad}}$$

AdcGyroXZ, AdcGyroYZ - se obtienen de la lectura realizada por el microcontrolador que representan los canales que miden la rotación de la proyección de R vector en XZ, respectivamente, en planos YZ, que es el equivalente a decir que la rotación se realiza alrededor de los ejes Y e X respectivamente.

Vref es la tensión de referencia ADC.

VzeroRate es la tensión de tasa cero, en otras palabras, la tensión que genera el giroscopio cuando no está sujeto a la rotación. (información proporcionada en la hoja de datos).

La sensibilidad del giroscopio se expresa en mV / (deg/s), que con frecuencia se escribe mV/°/s, lo que básicamente le indica cuántos mV será el aumento de la producción del giroscopio, si se aumenta la velocidad de rotación por un grados/s (información proporcionada en la hoja de datos).

Tomando un ejemplo, supongamos que nuestro módulo ADC devuelve los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \text{AdcGyroXZ} &= 571 \\ \text{AdcGyroXZ} &= 323 \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula anterior, y utilizando los parámetros de especificaciones técnicas de Acc\_Gyro, se obtiene:

$$\text{RateAxz} = \frac{\frac{571 * 3,3}{1023} - 1,23}{0,002 \left( \frac{\text{deg}}{\text{seg}} \right)} = \sim 306 \left[ \frac{\text{grados}}{\text{seg}} \right]$$

$$\text{RateAyz} = \frac{\frac{323 * 3,3}{1023} - 1,23}{0,002 \left( \frac{\text{deg}}{\text{seg}} \right)} = \sim -94 \left[ \frac{\text{grados}}{\text{seg}} \right]$$

En otras palabras, el dispositivo gira alrededor del eje Y (o puede decir que gira en el plano XZ) con una velocidad de 306 grados / s, y alrededor del eje X (o puede decir que gira en el plano YZ) con una velocidad de - 94 grados / s. Se observa que el signo negativo significa que el dispositivo gira en la dirección opuesta a la dirección positiva convencional. Por convención, un sentido de rotación es positivo. Una hoja de especificaciones de un giroscopio, de buena voluntad, muestra en qué dirección es positivo, de lo contrario ese valor se tendría que obtener mediante la experimentación con el dispositivo y tomando nota de la dirección de los resultados de la rotación de la tensión creciente en el pin de salida. Para estos fines es recomendable trabajar con un osciloscopio, ya que tan pronto como se detenga la rotación de

la tensión caerá de nuevo al nivel de tasa cero.

### 2.3 La combinación de datos del acelerómetro y giroscopio.

El primer paso en el uso de un dispositivo IMU es la combinación de un acelerómetro y un giroscopio, la alineación de sus sistemas de coordenadas. La forma más sencilla de hacerlo es elegir el sistema de coordenadas del acelerómetro como el sistema de coordenadas de referencia. La mayoría de las hojas de datos del acelerómetro mostrará la dirección de X, Y, Z con respecto a la imagen del chip físico o dispositivo. Por ejemplo, aquí están las direcciones de X, Y, Z, como se muestra en las especificaciones para la Acc\_Gyro bordo:

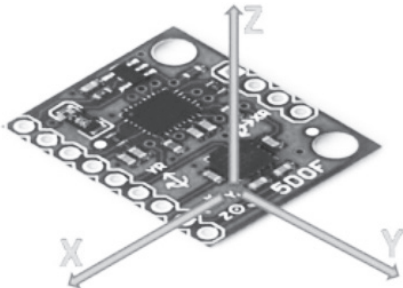


FIGURA 8. IMU CON SISTEMAS DE COORDENADAS

Los próximos pasos son los siguientes:

- Identificar las salidas del giroscopio que corresponden a RateAxz, valores RateAyz discutido anteriormente.

- Determinar si estas salidas deben ser invertidas debido a la posición física de giroscopio en relación con el acelerómetro. No asumir que, si un giroscopio tiene una salida marcada X o Y, corresponderá a cualquiera de los ejes en el sistema de coordenadas del acelerómetro, incluso si esta salida es parte de una unidad IMU. La mejor manera es probarlo.

- Se empieza colocando el dispositivo en posición horizontal, tanto X como las salidas Y del acelerómetro que la salida de la tensión

de gravedad cero (por ejemplo, para Acc\_Gyro este es habitualmente 1.65V).

- En la próxima salida, girar el dispositivo en el eje Y. Otra manera de decirlo es que se gira el dispositivo en el plano XZ, de modo que las salidas del acelerómetro X y Z permanecen constantes.

- Mientras se gira el dispositivo a una velocidad constante, se notan cambios en la salida del giroscopio. Las otras salidas del giroscopio deben permanecer constantes.

- La salida de giroscopio que cambió durante la rotación alrededor del eje Y (la rotación en el plano XZ) proporcionará el valor de entrada para AdcGyroXZ, de la cual se calcula RateAxz.

- El paso final es garantizar el sentido de rotación que corresponde a nuestro modelo, en algunos casos puede que se tenga que invertir el valor RateAxz debido a la posición física del giroscopio en relación con el acelerómetro.

- Se debe realizar nuevamente la prueba anterior, girando el dispositivo en torno al eje Y. Esta debe monitorizar la salida X del acelerómetro (AdcRx en nuestro modelo). Si AdcRx crece (los primeros 90 grados de rotación desde la posición horizontal), luego AdcGyroXZ debe disminuir debido a que estamos controlando el vector gravitacional. Cuando el dispositivo gira en una dirección, el vector debe girar en dirección opuesta (en relación con el sistema de coordenadas del dispositivo que estamos usando). Por lo tanto, lo que se necesita para invertir RateAxz se puede obtener mediante la introducción de un factor de signo en la ecuación 3, de la siguiente manera:

$$\text{RateAxz} = \text{InvertAxz} * \left( \frac{\left( \frac{\text{AdcGyroXZ} * \text{Vref}}{1023} - \text{VzeroRate} \right)}{\text{Sensibilidad}} \right)$$

, donde InvertAxz es 1 o -1.



Misma prueba se puede hacer para RateAyz., girando Girando el dispositivo alrededor del eje X, y se puede identificarse que como la transformación corresponde correspondiente a RateAyz del giroscopio y tiene que ser invertida. Una vez que se tenga el valor para InvertAyz, se debe utilizar la siguiente fórmula para calcular RateAyz:

$$\text{RateAyz} = \text{InvertAyz} * \left( \frac{\frac{\text{AdcGyroYZ} * \text{Vref}}{1023} - \text{VzeroRate}}{\text{Sensibilidad}} \right)$$

Si se le hacen estas pruebas en Acc\_Gyro se obtendría el siguiente resultado:

- El pin de salida de RateAxz es GX4 y InvertAxz = 1

- El pin de salida de RateAyz es GY4 y InvertAyz = 1

A partir de ahora se va a considerar que está configurada la IMU, de tal manera que se puede calcular los valores correctos para Axr, Ayr, Azr (tal como se define 2.1. Acelerómetro) y RateAxz, RateAyz (como se define en la 2.2. Giroscopio).

A continuación se analizarán las relaciones entre estos valores que resultan útiles en la obtención de una estimación más precisa de la inclinación del dispositivo con respecto al plano del suelo.

En los próximos pasos se presentará un algoritmo que toma algunas ideas utilizadas en el filtro de Kalman, sin embargo, es mucho más simple y más fácil de implementar en dispositivos encapsulados. Antes de eso se va a ver primero lo que se quiere calcular del algoritmo, como la dirección del vector fuerza de la gravitación  $R = [Rx, Ry, Rz]$  a partir de la cual se puede obtener otros valores como Axr, Ayr, Azr o  $\cos(x)$ ,  $\cos(y)$ ,  $\cos(z)$ , los cuales nos darían una idea acerca de la inclinación del dispositivo en relación con el plano del suelo. Se discute la relación

entre estos valores en el punto 2.1. Si bien ya se obtienen estos valores Rx, Ry, Rz de la ecuación 2 en el punto 2.2, hay que recordar que estos valores derivan de los datos del acelerómetro únicamente, por lo que si sería para usarlos directamente en su aplicación, puede ser que se consiga más ruido que la aplicación puede tolerar. Para evitar una mayor confusión se va a volver a definir las mediciones del acelerómetro de la siguiente manera:

Racc - es el vector de fuerza de inercia, medida por el acelerómetro, que consta de los componentes siguientes (proyecciones en X, Y, Z):

$$R_{xAcc} = \frac{\frac{\text{AdcRx} * \text{Vref}}{1023} - \text{VzeroG}}{\text{Sensibilidad}}$$

$$R_{yAcc} = \frac{\frac{\text{AdcRy} * \text{Vref}}{1023} - \text{VzeroG}}{\text{Sensibilidad}}$$

$$R_{zAcc} = \frac{\frac{\text{AdcRz} * \text{Vref}}{1023} - \text{VzeroG}}{\text{Sensibilidad}}$$

Hasta el momento, se tiene un conjunto de valores de medición que se puede obtener sólo a partir de los valores análogos del acelerómetro. Se llamará a este conjunto de datos un "vector" y se usará la siguiente notación:

$$R_{acc} = [R_{xAcc}, R_{yAcc}, R_{zAcc}]$$

Debido a que estos componentes de Racc se pueden obtener a partir de los datos del acelerómetro, se puede considerar una entrada al algoritmo.

Se debe tener en cuenta que Racc mide la fuerza gravitacional, que será correcta si se asume que la longitud de este vector es igual o cercana a 1 g.

$$|R_{acc}| = \sqrt{R_{xAcc}^2 + R_{yAcc}^2 + R_{zAcc}^2}$$

Sin embargo, para asegurarse de que tiene sentido se deberá actualizar este vector de la siguiente manera:

$$\text{Racc (normalizado)} = [\text{RxAcc} / |\text{Racc}|, \text{RyAcc} / |\text{Racc}|, \text{RzAcc} / |\text{Racc}|].$$

Esto asegurará que la longitud del vector de Racc normalizado sea siempre 1.

A continuación vamos a introducir un nuevo vector que llamaremos:

$$\text{Rest} = [\text{RxEst}, \text{RyEst}, \text{RzEst}]$$

Este será el resultado del algoritmo, que corrige los valores sobre la base de los datos de los giroscopios y con base en los últimos datos estimados.

Así es como funciona el algoritmo:

El acelerómetro nos dice: "Usted está ahora en posición de Racc"; respondemos: "Gracias, pero déjame chequear". A continuación, se corrige esta información con datos de los giroscopios, así como con los datos de los medidos anteriores para Rest y la salida de un nuevo vector Rest estimado.

Rest se considera "la mejor apuesta" en cuanto a la posición actual del dispositivo.

Se va a empezar la secuencia por confiar en el acelerómetro, y la asignación queda así:

$$\text{Rest}(0) = \text{Racc}(0)$$

Hay que recordar que Rest y el Racc son vectores, por lo que la ecuación anterior es sólo una forma simplificada de generar 3 series de ecuaciones y evitar así la repetición:

$$\text{RxEst}(0) = \text{RxAcc}(0)$$

$$\text{RyEst}(0) = \text{RyAcc}(0)$$

$$\text{RzEst}(0) = \text{RzAcc}(0)$$

A continuación se harán mediciones periódicas en intervalos de tiempo iguales a T segundos, y se obtendrán nuevas mediciones que se definirán como Racc(1), Racc(2), Racc(3) y así sucesivamente. También se expresarán nuevas estimaciones en cada intervalo de tiempo Rest(1), Rest(2), Rest(3) y así sucesivamente.

Supongamos que estamos en n pasos. Se tienen dos grupos conocidos de valores que nos gustaría utilizar:

Rest(n-1) - nuestra estimación anterior, con el Rest(0) = Racc(0)

Racc(n) - actual medición del acelerómetro

Antes de que se pueda calcular Rest(n), se va a introducir un nuevo valor de medición, que se puede obtener del giroscopio y una estimación anterior.

Lo nombraremos como Rgyro, que también es un vector formado por 3 componentes:

$$\text{Rgyro} = [\text{RxGyro}, \text{RyGyro}, \text{RzGyro}]$$

Se va a calcular este vector de un componente a la vez. Se empieza con RxGyro..

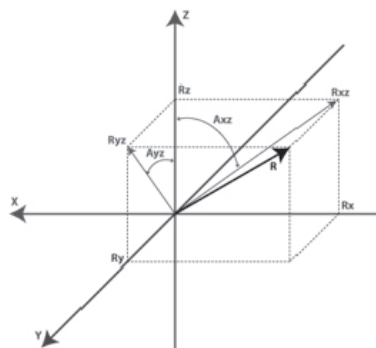


FIGURA 9. SISTEMA DE COORDENADAS DE LOS EJES DEL ACELERÓMETRO Y GIROSCOPIO.

Se va a empezar por observar la siguiente relación en el modelo del giroscopio, desde el triángulo rectángulo formado por Rz y Rx se puede deducir que:

$$\text{tang}(Axz) = Rx / Rz \Rightarrow Axz = \text{atan2}(Rx, Rz)$$

Atan2 es una función poco usada, similar a la atan, solo que devuelve los valores en el rango de  $(-\pi, \pi)$  en lugar de  $(-\pi/2, \pi/2)$ , como lo realiza atan. Es decir, se lleva 2 argumentos en lugar de uno y nos permite convertir los dos valores de Rx, Rz a ángulos en toda la gama de los 360 grados  $(-\pi$  a  $\pi)$ .

Así que sabiendo RxEst (n-1), y RzEst (n-1), se puede encontrar:

$$Axz(n-1) = \text{atan2}(RxEst(n-1), RzEst(n-1)).$$

Hay que recordar que el giroscopio mide la tasa de cambio del ángulo AXZ. Así se puede estimar la nueva AXZ y el ángulo (n) como sigue:

$$Axz(n) = Axz(n-1) + \text{RateAxz}(n) * T$$

Hay que recordar que RateAxz se puede obtener del giroscopio a través de lecturas analógicas. Una forma más precisa es utilizar una velocidad de rotación media calculada como sigue:

$$\text{RateAxzAvg} = \frac{\text{RateAxz}(n) + \text{RateAxz}(n-1)}{2}$$

$$Axz(n) = Axz(n-1) + \text{RateAxzAvg} * T$$

De la misma manera que podemos encontrar:

$$Ayz(n) = Ayz(n-1) + \text{RateAyz}(n) * T$$

Ahora se tiene Axz (n) y Ayz (n). En este momento se puede escribir la longitud del vector Rgyro como sigue:

$$|Rgyro| = \sqrt{RxGyro^2 + RyGyro^2 + RzGyro^2}$$

También se ha normalizado el vector de Racc, de manera que se puede suponer que la longitud es de 1 y no ha cambiado después de la rotación, por lo que es relativamente seguro escribir:

$$|Rgyro| = 1$$

Se va a adoptar una notación temporal más corta para los cálculos siguientes:

$$x = RxGyro, y = RyGyro, z = RzGyro$$

Utilizando las relaciones anteriores, se puede escribir:

$$x = \frac{x}{1} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Se va a dividir el numerador y el denominador de la fracción por  $\sqrt{x^2 + z^2}$

$$x = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}}{\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + z^2}}}$$

Teniendo en cuenta que  $\frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \sin(Axz)$ , por lo que:

$$x = \frac{\sin(Axz)}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2 + z^2}}}$$

Ahora se multiplica el numerador y el denominador de la fracción en el interior de la raíz por  $z^2$ :

$$x = \frac{\sin(Axz)}{\sqrt{1 + \frac{y^2 \cdot z^2}{(x^2 + z^2) \cdot z^2}}}$$

Teniendo en cuenta que  $\frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \cos(Axz)$  y  $\frac{y}{z} = \tan(Ayz)$ , por lo que finalmente:

$$x = \frac{\sin(Axz)}{\sqrt{1 + \cos(Axz)^2 \cdot \tan(Ayz)^2}}$$

Volviendo a la notación, se obtiene:

$$RxGyro = \frac{\sin(Axz(n))}{\sqrt{1 + \cos(Axz(n))^2 \cdot \tan(Ayz(n))^2}}$$

De la misma manera, nos encontramos con que:

$$RyGyro = \frac{\sin(Ayz(n))}{\sqrt{1 + \cos(Ayz(n))^2 \cdot \tan(Axz(n))^2}}$$

Nota al margen: es posible simplificar aún más esta fórmula. Al dividir las dos partes de la fracción por el  $\sin(Axz(n))$ , se obtiene:

$$RxGyro = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sin(Axz(n))^2} + \frac{\cos(Axz(n))^2}{\sin(Axz(n))^2} \cdot \tan(Ayz(n))^2}}$$

$$RxGyro = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sin(Axz(n))^2} + \frac{\sin(Axz(n))^2 \cdot \cot(Ayz(n))^2}{\cos(Axz(n))^2}}}$$

Ahora se suma y resta:

$$\frac{\cos(Axz(n))^2}{\sin(Axz(n))^2} = \cot(Axz(n))^2$$

$$RxGyro = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sin(Axz(n))^2} - \frac{\cos(Axz(n))^2}{\sin(Axz(n))^2} + \frac{\sin(Ayz(n))^2 \cdot \cot(Axz(n))^2}{\cos(Ayz(n))^2} + \cot(Axz(n))^2}}$$

Y mediante la agrupación de los términos 1 y 2, y luego 3 y 4, se obtiene:

$$RxGyro = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot(Axz(n))^2 \cdot \sec(Ayz(n))^2}}$$

, donde  $\cot(x) = 1 / \tan(x)$  y  $\sec(x) = 1 / \cos(x)$

Esta fórmula utiliza sólo dos funciones trigonométricas, lo que puede ser computacionalmente menos engorroso.

Ahora, por fin se puede encontrar:

$$RzGyro = \text{sign}(RzGyro) \cdot \sqrt{1 - RxGyro^2 - RyGyro^2}$$

Cuando  $\text{sign}(RzGyro) = 1$ , cuando  $RzGyro \geq 0$ ,  
y  $\text{sign}(RzGyro) = -1$ , cuando  $RzGyro < 0$ .

Una forma sencilla de calcular es tomar:

$$\text{sign}(RzGyro) = \text{sign}(RzEst(n-1))$$

En la práctica, se debe tener cuidado cuando  $RzEst(n-1)$  es cercana a 0. Se puede saltar la fase de giro por completo en este caso, y asignar:  $Rgyro = RzEst(n-1)$ .  $Rz$  se utiliza como referencia para el cálculo de ángulos  $AxzyAyz$ ; cuando está cerca de 0, los valores pueden desbordarse y provocar malos resultados.

Recapitulando lo que se tiene hasta ahora, se está en el paso  $n$  del algoritmo, y se ha calculado los siguientes valores:

Racc - lecturas actuales del acelerómetro  
Rgyro - obtenido a partir de  $RzEst(n-1)$  y las lecturas del giroscopio.

Se va a utilizar una media ponderada, de manera que:

$$Rest(n) = \frac{(Racc \cdot w_1 + Rgyro \cdot w_2)}{(w_1 + w_2)}$$

Se puede simplificar esta fórmula, dividiendo el numerador y el denominador de la fracción por  $w_1$ .

$$Rest(n) = \frac{\left( Racc \cdot \frac{w_1}{w_1} + Rgyro \cdot \frac{w_2}{w_1} \right)}{\left( \frac{w_1}{w_1} + \frac{w_2}{w_1} \right)}$$

y después de sustituir  $w_2/w_1 = wGyro$ , se obtiene:

$$Rest(n) = \frac{(Racc + Rgyro \cdot wGyro)}{(1 + wGyro)}$$

(Ecuación 4)

Se está a un paso de conseguir los valores estimados actualizados:

$$RxEst(n) = \frac{RxAcc + RxGyro \cdot wGyro}{1 + wGyro}$$

$$RyEst(n) = \frac{RyAcc + RyGyro \cdot wGyro}{1 + wGyro}$$

$$RzEst(n) = \frac{RzAcc + RzGyro \cdot wGyro}{1 + wGyro}$$

Ahora se va a normalizar este vector de nuevo:

$$R = \sqrt{RxEst^2 + RyEst^2 + RzEst^2}$$

$$RxEst(n) = RxEst(n) / R$$

$$RyEst(n) = RyEst(n) / R$$

$$RzEst(n) = RzEst(n) / R$$

Y luego de esto, se vuelve a empezar.

### 3. RESULTADOS

Implementado en código en el Microcontrolador ATmega328P, se tienen los siguientes resultados:

Puesto a prueba en primera instancia a movimientos suaves, girando en torno al eje X, se obtiene RxAcc que pertenece a la aceleración variable del acelerómetro sin procesar (en Azul) y RxEst, que corresponde a los datos del acelerómetro y giroscopio filtrados (en Rojo). Posteriormente, se aplica una prueba similar, pero sumada con vibraciones. Queda de manifiesto que el comportamiento del filtro nos ayuda amortiguar los cambios bruscos y realizar una buena estimación de la inclinación, sin acumular ruido.

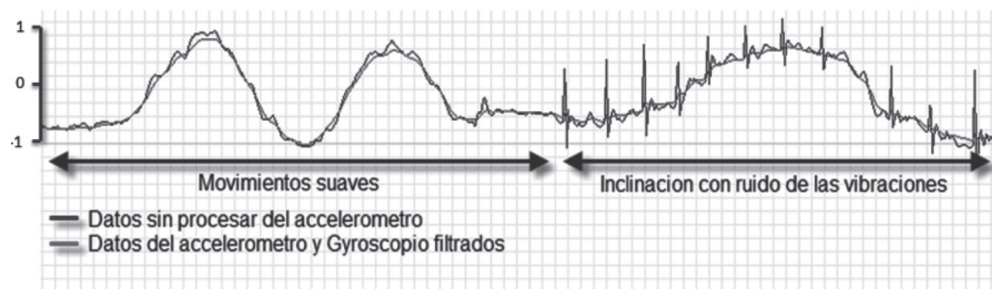


FIGURA 10. GRÁFICA DE DATOS INERCIALES, SIN PROCESAR Y CON FILTRADO.

#### 4. CONCLUSIONES

Es inevitable realizarse la siguiente pregunta: si el modelo acelerómetro ya nos dio ángulos de inclinación de  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$ , ¿por qué querríamos molestarnos con los datos de los giroscopios? La respuesta es simple: los datos del acelerómetro no siempre se pueden confiar al 100%. Hay varias razones. Hay que recordar que el acelerómetro mide la fuerza de inercia, y dicha fuerza puede ser causada por gravitación (e idealmente sólo por gravitación), pero también podría ser causada por la aceleración (movimiento) del dispositivo. Como resultado, incluso si el acelerómetro está en un estado relativamente estable, todavía es muy sensible a las vibraciones y ruidos mecánicos en general. Esta es la razón principal por la que la mayoría de los sistemas IMU utiliza un giroscopio para suavizar los errores del acelerómetro. Si bien el giroscopio no está libre de ruidos, debido a que al medir la rotación es menos sensible a los movimientos mecánicos lineales, el tipo de ruido que sufre el acelerómetro evidencia que los giroscopios tienen otros tipos de problemas, como por ejemplo la derivada (no regresar al valor de tasa cero cuando la rotación se detiene). Sin embargo, del promedio de los datos que provienen del acelerómetro y del giroscopio se puede obtener una estimación relativamente mejor de la inclinación actual del dispositivo, lo que se obtendría al utilizar los datos del acelerómetro solo.

La principal diferencia de este algoritmo con filtro Kalman es que este peso es relativamente fijo, mientras que en el filtro de Kalman los pesos están permanentemente actualizada basada en el ruido medido de las lecturas del acelerómetro. El Filtro de Kalman se centra en darle "lo mejor" de los resultados teóricos, mientras que este algoritmo puede dar un resultado "suficientemente bueno" para la aplicación práctica. Se puede implementar un algoritmo

que se ajusta a  $w_{Gyro}$  dependiendo de algunos factores de ruido objeto de la medición, pero los valores fijos funcionan bien para la mayoría de las aplicaciones.

#### 5. BIBLIOGRAFÍA

1. **M. Grewal, L. Weill, and A. Andrews**, Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration, Wiley, 2007.
2. **P. Groves**, Principles of GNSS, inertial, and multi-sensor integrated navigation systems. Artech House, 2008.
3. **K. Valavanis, P. Oh, and L. Piegl**, Unmanned Aircraft Systems: International Symposium on Unmanned Aerial Vehicles, UAV'08. Springer, 2008.
4. **P. Aggarwal, Z. Syed, A. Noureldin, and N. El-Sheimy**, MEMS-Based Integrated Navigation, ser. GNSS technology and applications series. Artech House, 2010.
5. **H. D. Whyte and T. C. Henderson**, Springer Handbook of Robotics. Springer, 2008, ch. Multisensor Data Sensor, pp. 1–26.
6. **H. Qi and J. Moore**, "Direct kalman filtering approach for gps/ins integration," Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, vol. 38, no. 2, pp. 687–693, apr 2002.
7. <http://www.mikroquad.com/pub/Research/ComplementaryFilter/filter.pdf>
8. <http://stackoverflow.com/questions/1586658/combine-gyroscope-and-accelerometer-data>
9. <http://www.dimensionengineering.com/accelerometers.htm>