Miguel Montenegro Concha

Doctor en Matemáticas Universitat Jaume I

EL TEOREMA DE PITÁGORAS Y SUS EXTENSIONES

RESUMEN

Quizás el Teorema más conocido en matemáticas sea el Teorema de Pitágoras. En este trabajo analizaremos su procedencia histórica y sus extensiones para estimular el espíritu investigador de nuestros estudiantes y exponer sus alcances pedagógicos. Además, haremos uso del programa Geogebra y resaltaremos su contribución a la enseñanza de la Geometría Dinámica.

Palabras claves: Geometría Dinámica, Pitagóricos, Homotecias.

1.1. HISTORIA

Pitágoras de Samos (569 a.C. 475 a.C.) fue un filósofo y matemático griego considerado el primer matemático puro. Contribuyó de manera significativa en el avance de áreas en matemática, como la geometría y la aritmética, las relaciones numéricas que aplicó por ejemplo a la teoría de pesos y medidas, a la teoría de la música y a la astronomía. [2, historia]

Fundó la Hermandad Pitagórica, una sociedad religiosa. Se interesó también en áreas tan diversas como la medicina, la cosmología, la filosofía, la ética y la política, entre otras disciplinas. El pitagorismo formuló principios que influyeron tanto en Platón como en Aristóteles y, de manera más general, en el posterior desarrollo de la matemática y en la filosofía racional en Occidente.

No se ha conservado ningún escrito original de Pitágoras. Sus discípulos –los pitagóricos– invariablemente justificaban sus doctrinas citando la autoridad del maestro, por lo que resulta difícil distinguir entre los hallazgos de Pitágoras y los de sus seguidores. Se le atribuye a Pitágoras la teoría de la significación funcional de los números en el mundo objetivo y en la música además de otros descubrimientos, como la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado o el teorema de Pitágoras para los triángulos rectángulos.

Los datos verificables sobre la vida de Pitágoras son escasos, dado que no existen textos de su autoría ni biografías firmadas por contemporáneos.

Los primeros escritos detallados, que datan de entre 150 y 250 años después de su muerte, se basan en historias transmitidas de manera oral y muestran grandes diferencias entre sí. Asimismo, muchos mitos y leyendas se forjaron en torno a su persona, motivados probablemente por el mismo Pitágoras, pero también debido a la naturaleza de la doctrina pitagórica y sus seguidores: una confraternidad hermética, regida por símbolos místicos y costumbres esotéricas.

Sin embargo, el Teorema de Pitágoras es anterior al mismo Pitágoras, ya que se usaba para algunos casos particulares

Si se observan construcciones antiguas, hay que admitir que aquellos constructores y agricultores tuvieron que ser capaces de hacer ángulos rectos a campo traviesa. Los egipcios se servían de cuerdas y nudos para establecer las líneas-guías de construcción. Por ejemplo, al unir los extremos de una cuerda doblada dos veces formando tres lados de 12, 13 y 5 nudos respectivamente, se obtiene un triángulo recto. Los escribas egipcios, lamentablemente, no dejaron instrucciones sobre estos procedimientos, ni mucho menos una pista sobre cómo generalizar una regla para obtener el teorema que sería redactado más tarde por Pitágoras. [3]

Por su parte, las escrituras védicas de la antigua India contienen secciones llamadas sulvasutras (término que significa algo así como "reglas de la cuerda") para describir la exacta ubicación de sus altares ceremoniales. Los ángulos rectos eran obtenidos a través de cuerdas marcadas por las tríadas 3, 4, 5 y 5, 12, 13. En el caso de los pueblos precolombinos, se ha especulado que aquellos trazados en los dibujos de Nazca podrían ser de naturaleza extraterrestre, con el argumento de que no existía tecnología suficiente como para realizar tamaña empresa. Sin embargo, el método de las cuerdas ya usadas por los egipcios e indios podría explicar perfectamente la confección de los dibujos haciendo uso de la homotecia.

En las tablas de arcilla babilónicas del segundo milenio a.C. se pueden ver problemas planteados de una manera que hace suponer que en ese tiempo ya se conocían tríadas numéricas de acuerdo a la relación pitagórica.

La Pirámide de Kefrén, datada en el siglo XXVI a.C., fue la primera gran pirámide que se construyó basándose en el llamado triángulo sagrado Egipcio, de proporciones 3, 4, 5, es decir, una aplicación simple del Teorema de Pitágoras.

1.2. VÍCTIMA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

La mayor parte de los científicos de la historia, ya sean matemáticos, físicos, químicos, biólogos o de cualquier otra rama, han soñado y sueñan con realizar un descubrimiento brillante, que cambie el paradigma de la ciencia de su tiempo. Pero cuando esto ocurre la situación no suele ser del todo cómoda para la persona en cuestión. Si revisamos la Historia de la Ciencia, observamos que muchos han sido mártires de las concepciones religiosas y/o el status quo de la época. Basta nombrar a Hipatia de Alejandría, Hipatia quien murió linchada por una turba de cristianos acusada de pagana; a Miguel Servet, arrestado en Ginebra, sometido a juicio y condenado a morir en la hoguera por orden del Consejo de la Ciudad cuando en ella predominaba la influencia Calvinista; a Giordano Bruno, religioso, filósofo, astrónomo y poeta italiano, acusado de herejía, entre cuyas ideas "heréticas" figura su consideración de un universo infinito y la existencia de otros sistemas solares aparte del nuestro. Y quizás el caso más conocido sea el de Galileo Galilei, perseguido por la Santa Inquisición.

En el caso del Teorema de Pitágoras, también existe un mártir, que en este caso padeció en manos de los propios pitagóricos: Hipaso.

La muerte de Hipaso de Metaponto. [1]

Los pitagóricos tenían la firme creencia de que todo el Universo podía ser explicado con números. Pero, ¿con qué números? Pues con números naturales, esto es, 1,2,3, . . ., y con las fracciones que pueden formarse con ellos, es decir, $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \ldots$ En cierto modo puede ser una creencia lícita y razonable.

Según cuenta la leyenda, Hipaso fue el "culpable" de ello. Al parecer Hipaso se planteó el problema de medir la diagonal de un cuadrado utilizando el lado como unidad de medida. Por plantear el problema de la forma más simple posible, tomemos un cuadrado de lado 1. En esta situación la pregunta que según parece se hizo Hipaso fue: ¿cuánto mide la diagonal de este cuadrado? La respuesta es Raíz de dos

Teniendo en cuenta la condición de pitagórico de Hipaso, es posible que él mismo esperara que la medida de esta diagonal pudiera expresarse como un número natural o una fracción, pero en realidad no fue así. Hipaso se dio cuenta de que esta medida no podía expresarse ni como un número natural ni como una fracción formada por números naturales. Ahora sabemos que esta diagonal mide $\sqrt{2}$, y que es un número de los llamados irracionales.

Cuenta la leyenda que Hipaso fue el descubridor de este hecho. Lo que parece más cercano a la realidad es que el propio Hipaso comunicó este descubrimiento fuera de la comunidad pitagórica, lo que determinó su final. Según algunas fuentes, los pitagóricos lo arrojaron al mar por revelar fuera de la secta esta catástrofe pitagórica, aunque otras aseguran que lo que hicieron los pitagóricos fue organizar un simulacro de funeral, con tumba incluida, que simbolizaba que para ellos Hipaso pasaba a estar muerto. Hasta se comenta que Hipaso podría haberse suicidado (hecho que podría cuadrar con la hipótesis del funeral simulado). Sea como fuere, la raíz de la muerte de Hipaso para los pitagóricos, ya fuera simbólica o real, fue esa diagonal del cuadrado, ese número irracional, esa hecatombe pitagórica (¿cómo se iba a poder explicar el Universo con números naturales y fracciones si ni siquiera puede medirse la diagonal de un cuadrado con ellos?). La demostración de este hecho es clásico en una guía de ejercicios de Licenciatura en Matemáticas. He aquí una de ellas.

Teorema. La raíz de 2 es irracional (demostración por reducción al absurdo). La demostración comienza suponiendo que la raíz de 2 no es irracional y acabará en algo contradictorio. Si no es irracional debe ser obligatoriamente racional, es decir, debe ser igual a una fracción así:

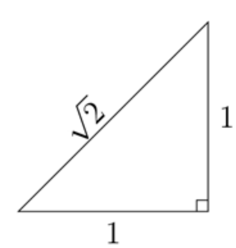

Figura 1.1: Raíz de 2.

Si

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Podemos suponer sin ningún problema que el máximo común divisor de *p* y *q* es 1, es decir, que no tienen factores comunes y por tanto son primos relativos. Elevamos al cuadrado y operando queda:

$$2 = \frac{p^2}{q^2}, \quad p^2 = 2q^2$$

Por tanto, p^2 debe ser múltiplo de 2, lo que implica que *p* también es un múltiplo de 2. Es decir, $p = 2k$ para un cierto $k \in \mathbb{Z}$. Sustituimos este valor de *p* en la expresión anterior y simplificamos por 2 de esa igualdad:

$$2q^2 = (2k)^2 = 4kq^2, \quad q^2 = 2k^2$$

Por lo tanto q^2 es múltiplo de 2, y en consecuencia también lo es *q*. Y aquí está el absurdo: habíamos supuesto que *p* y *q* no tenían factores comunes (es decir, el máximo común divisor de *p* y *q*, *mcd* (*p, q*) = 1) y hemos llegado a que los dos son múltiplos de 2, y por tanto su mcd debe ser al menos 2. Esa es la contradicción que buscábamos. Conclusión: raíz de 2 es irracional.

1.3. EL TEOREMA DE PITÁGORAS

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
-Pitágoras de Samos.

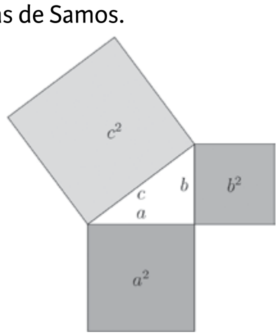

Figura 1.2: Teorema de Pitágoras.

Sobre las demostraciones del Teorema de Pitágoras, el matemático estadounidense E. S. Loomis catalogó 367 pruebas diferentes en su libro de 1927, The Pythagorean Proposition.

El Zhou Bi es una obra matemática de datación discutida en algunos lugares, aunque se acepta mayoritariamente que fue escrita entre el 500 y el 300 a. C. Es la mas antigua demostración conocida. Se cree que Pitágoras no conoció esta obra. Cabe destacar aquí que aunque no hay registros de la demostración del Teorema por parte de Pitágoras se supone que se basó en la semejanza de triángulos y las proporciones, de tal manera que su demostración estaría restringida sólo a los triángulos con lados racionales.

Entre las demostraciones conocidas se pueden destacar la contenida en la proposición I.47 de su gran obra "Los Elementos" de Euclides, la de Leonardo Da Vinci y la de James Abram Garfield, el vigésimo presidente de los Estados Unidos. [4]

Extensiones del Teorema de Pitágoras

Aunque al Teorema de los cosenos también se conoce como Teorema General de Pitágoras para triángulos cualesquiera, no es el tipo de extensión que nos interesa en este trabajo, ya que nos abocaremos a triángulos rectángulos. En los cursos de análisis, al estudiar los Espacios Vectoriales, se define el espacio de Hilbert, de la siguiente manera.

Definición. Decimos que *X* es un espacio de Hilbert si es un espacio vectorial con producto interno completo.

Se define que dos elementos *x* e *y* de un espacio de Hilbert *X* son ortogonales si su producto interno es cero y lo denotamos por $x \perp y$.

Con esto tenemos la siguiente formulación del Teorema de Pitágoras:

Teorema de Pitágoras. Si $x \perp y$ entonces $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, donde $\| \; \|$ representa la "norma" del vector.

La extensión que nos interesa en forma particular es la siguiente. Si el Teorema de Pitágoras nos dice que la suma del área de los cuadrados sobre los catetos es igual al área del cuadrado sobre la hipotenusa, ¿qué pasa si calculamos la suma del área de triángulos equiláteros construidos sobre los catetos? ¿Sería igual al área del triángulo equilátero construido sobre la Hipotenusa?

De forma más general aun: ¿será la suma del área de los polígonos regulares construidos sobre los catetos igual al área del polígono regular construido sobre la hipotenusa? Y si lo hacemos con semicircunferencias, ¿se seguirá cumpliendo el Teorema? Y siguiendo con este racionamiento, ¿hasta dónde lo podemos extender?

Iniciaremos las respuesta a las interrogantes anteriores usando el software libre Geogebra, de gran utilidad para enseñar lo que actualmente se conoce como Geometría Dinámica y que es aplicable a varias áreas de la matemática como la Geometría Analítica y el Cálculo. [5]

En Geogebra (ver figuras 1.3 y 1.4) se construyó el programa que permite cambiar el número de lados *n* del polígono, mediante la definición de la barra deslizante que aparece el lado superior con la letra *n*. En el lado inferior izquierdo se encuentran las áreas de los polígonos y la verificación de que las sumas las áreas de los polígonos construidos sobre los catetos es igual área del polígono al construido sobre la hipotenusa. En las figuras se muestran para el caso $n = 3$ y $n = 6$.

Enunciaremos la siguiente versión del Teorema de Pitágoras:

En un triángulo rectángulo la suma de las áreas de los polígonos regulares de *n* lados construidos sobre los catetos es igual al área del polígono regular de n lados construido sobre la hipotenusa.

Demostración. Dado un polígono regular de *n* lados el área está dada por:

$$A_n = \frac{n}{2} \cdot \text{apotema} \cdot \text{base}$$

donde el apotema es la distancia del centro del polígono a la base. A su vez el apotema se puede calcular como:

$$\text{apotema} = \frac{\text{base}}{2} cotg\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

con lo cual el área de un polígono regular de *n* lados resulta:

$$A_n = \frac{n}{4}\text{base}^2 \cdot cotg\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

De esta manera tenemos que la suma de los polígonos de los catetos de lados *a* y *b* está dada por:

$$\frac{n}{4}a^2 \cdot cotg\left(\frac{\pi}{n}\right) + \frac{n}{4}b^2 \cdot cotg\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{n}{4}cotg\left(\frac{\pi}{n}\right)(a^2+b^2) = \frac{n}{4}cotg\left(\frac{\pi}{n}\right)c^2$$

Donde la última expresión corresponde al área del polígono de lado *c*, con lo que queda demostrado el Teorema.

Pero siguiendo esta línea, ¿hasta dónde podemos extender el Teorema de Pitágoras? Para ello, definiremos el concepto de homotecia.

Homotecia. Se llama homotecia de centro *O* y razón *k* ($k \neq 0$) a la transformación que hace corresponder un punto A con otro A', colineal alineado con *A* y *O* tal que $OA' = kOA$.

Definamos por homotecia las transformaciones:

$$g : [0, c] \longrightarrow [0, a], \qquad x \longrightarrow g(x) = \frac{a}{c} f\left(\frac{c}{a}x\right)$$

Y análogamente

$$h : [0, c] \longrightarrow [0, b], \qquad x \longrightarrow h(x) = \frac{b}{c} f\left(\frac{c}{b}x\right)$$

Donde f es como la indicada en la figura 1.5. Calculemos las áreas mediante las siguientes integrales:

$$\int_0^a g(x)dx + \int_0^b h(x)dx = \int_0^a \frac{a}{c} f\left(\frac{c}{a}x\right) dx + \int_0^b \frac{b}{c} f\left(\frac{c}{b}x\right) dx0$$

Haciendo el cambio de variables

$$u = \frac{c}{a}x,\ dx = \frac{a}{c}du, \quad \text{si } x = 0\ u = 0; \ \text{ si } x = a,\ u = c$$

y en la segunda integral:

$$v = \frac{c}{b}x,\ dx = \frac{b}{c}dv, \quad \text{si } x = 0\ v = 0; \ \text{ si } x = b,\ v = c$$

con lo que la bc expresión anterior resulta:

$$\frac{a}{c}\int_0^c \frac{a}{c} f(u)du + \frac{b}{c}\int_0^c \frac{b}{c} f(u)du = \frac{a^2 + b^2}{c^2}\int_0^c f(v)dv = \int_0^c f(u)du$$

Con lo que queda demostrado el teorema de Pitágoras si sus lados se construyen por homotecias.

Con esto podemos enunciar el Teorema de este modo:

Teorema. En un triángulo rectángulo la suma de las áreas del logo de la UTEM construidas sobre los catetos es igual al área del logo de la UTEM construida sobre la Hipotenusa.

El teorema sigue siendo válido debido a que la homotecia es una transformación lineal y, por lo tanto, determina que en el cálculo de áreas las relaciones entre las áreas sean cuadráticas.

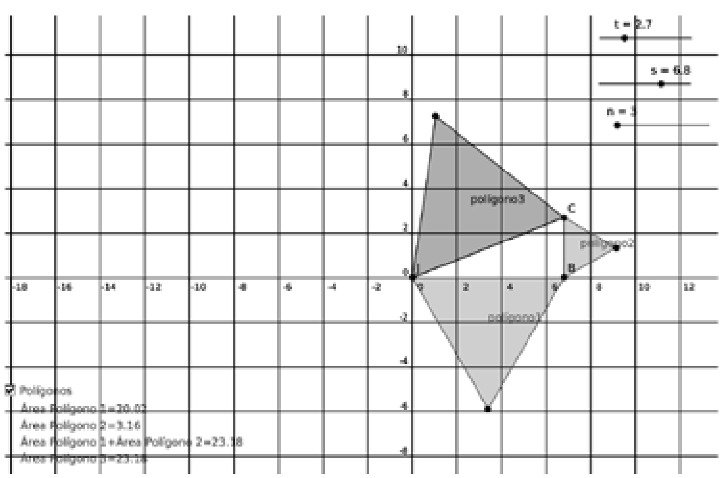

Figura 1.3: Área de los triángulos. Construcción usando Geogebra.

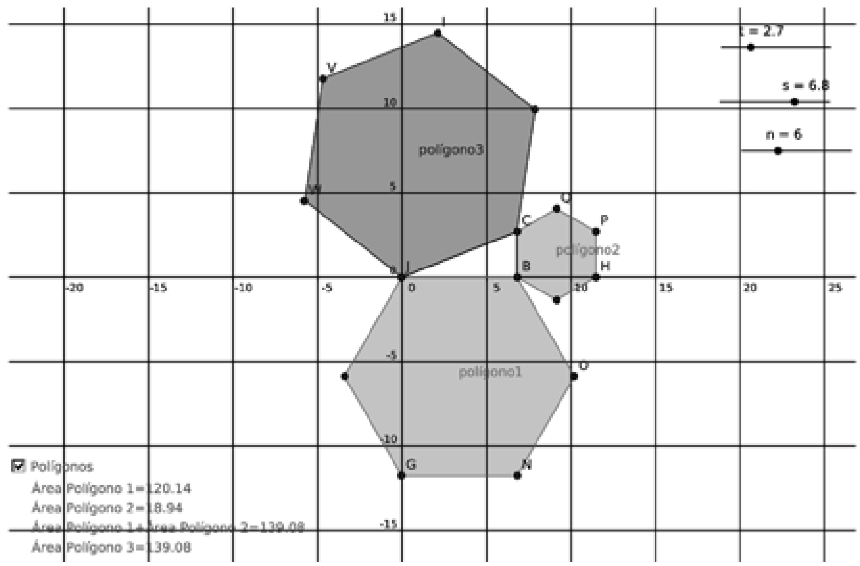

Figura 1.4: Teorema para hexágonos ($n = 6$). Construcción usando Geogebra.

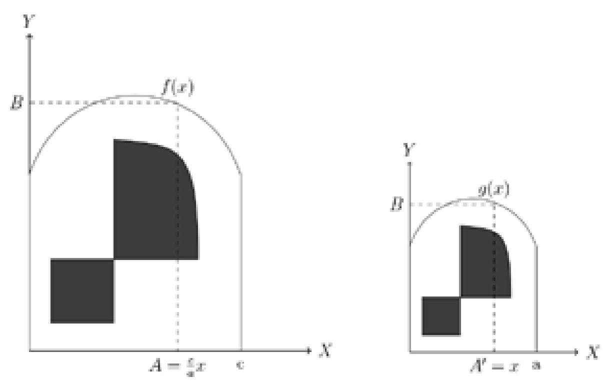

Figura 1.5: Representación de f y g para hallar las transformaciones.

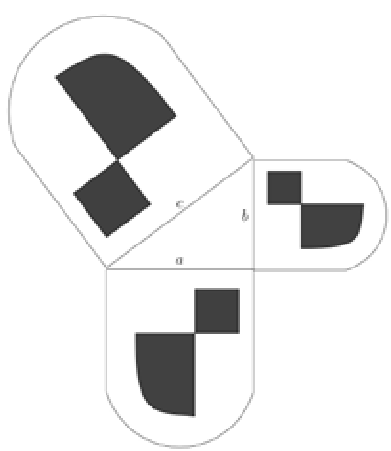

Figura 1.6: El área del logo UTEM, construido sobre los lados del triángulo rectángulo, cumple con el Teorema de Pitágoras.

BIBLIOGRAFÍA

[1] http://www.gaussianos.com. La raíz de la muerte de Hipaso. 2012.

[2] Diógenes Laercio. *Escuela Italiana. Pitágoras y los pitagóricos. Biblioteca virtual. Miguel de Cervantes VIII*, 2012.

[3] James Newman. Sigma. *El mundo de las Matemáticas*. Editorial Grijalbo, 1985.

[4] Paul Strathern. *Pitágoras y su Teorema.* Editorial Siglo XXI, 1999.

[5] www.geogebra.org.